

TEORÍA DE FUNCIONES DE GREEN APLICADA A MODOS DE EXCITACIÓN DE MAGNETOPLASMA EN GEOMETRÍAS CILÍNDRICAS

Vladimir A. Bolaños Q, Juan Carlos Granada E.

Departamento de Física, Universidad del Valle, AA 25 360, Cali, (Colombia)

RESUMEN

Extendiendo la teoría de funciones de Green recientemente desarrollada por M. S. Kushwaha and B. Djafari-Rouhani [1] a un sistema cilíndrico con una y dos interfaces bajo la acción de un campo magnético, estudiamos los modos de excitación de un plasma confinado en la geometría de Faraday. La función de respuesta lineal del sistema se obtuvo explícitamente en el límite no-retardado, lo que permitió obtener varias propiedades físicas, tales como la ley de dispersión y el poder espectral de los modos colectivos.

ABSTRACT

By extending the theory of functions of Green developed recently by M. S. Kushwaha and B. Djafari-Rouhani [1] to a cylindrical system of one and two interfaces under the action of an axial external magnetic field, we study the excitation modes of a confined plasma in the Faraday's geometry. The inverse response function of the system is obtained explicitly, in the nonretarded limit, that allowed to obtain several physical properties of the collective modes, like its dispersion law and its spectral power.

INTRODUCCIÓN

El método tradicional para conseguir relaciones de dispersión de un sistema es aplicando condiciones de frontera a las componentes del campo de la onda, generándose así un sistema de ecuaciones que para el caso de más de dos interfaces requiere bastante cuidado y es engorroso resolver. En este reporte se presenta un método sencillo aplicado a cavidades cilíndricas llamado BBS (Black-Box-Surface [1]) que junto con la teoría de funciones de Green en el marco de la IRT (Interface-Response-Theory [2]) hace que se obtengan casi de manera natural las funciones inversa de respuesta del sistema, siendo ya esto una ganancia respecto al anterior método notando que, además de ahorrarse resolver tediosos sistemas de ecuaciones, es posible obtener valiosa información a partir de las estas funciones de respuesta como su poder espectral y densidad local y total de estados [1]. Los sistemas considerados, Fig.1, corresponden a ondas electromagnéticas (EM) propagándose por un cilindro de una y dos interfaces (cilindro coaxial). El cilindro se encuentra bajo la acción de un campo magnético externo constante dirigido en dirección paralela al eje del cilindro. La dirección de propagación de la onda es paralela al campo magnético, configuración de Faraday [3].

MODELO

El propósito de la BBS es aislar un sistema de otro por medio de una superficie idealizada por donde las ondas EM no se pueden propagar de manera que se interrumpe cualquier interacción

entre los medios. Se obtiene una perturbación localizada en la superficie común de los medios representada por el operador \mathbf{V} . El operador de un medio con superficie se escribe como

$$h=H+V, \tag{1}$$

donde \mathbf{H} corresponde al operador del sistema infinito (sin frontera). Por definición [2] las funciones de Green del sistema infinito \mathbf{G} como del sistema con frontera \mathbf{g} son las soluciones de:

$$HG=I \tag{2}$$

$$hg=I \tag{3}$$

donde \mathbf{I} es el operador unitario, lo que permite obtener una relación que es conocida como ecuación de Dyson:

$$g(I+VG)=G. \tag{4}$$

De la que se puede hallar la función de respuesta o su inversa.

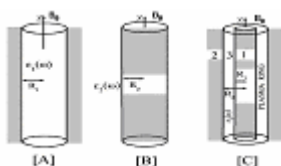


Fig. 1 Esquemas de los sistemas y perturbaciones a analizar. La región sombreada se refiere a la BBS. [A] ([B]) se equivale a un plasma (dieléctrico) cilíndrico en un medio dieléctrico (plasma). [C] esquematiza un cascarón de plasma cilíndrico rodeado por un dieléctrico.

Se adopta el sistema de coordenadas cilíndricas y se orienta el eje del cilindro paralelo al eje z . La dependencia espacial y temporal de los campos EM de la onda es de la forma $\mathbf{A}(\rho, \theta, z) \sim \mathbf{A}(\rho, \theta)e^{i(kz-\omega t)}$, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{E}$ o \mathbf{B} , κ , ω , son el vector de onda y la frecuencia de las ondas EM. La presencia del campo magnético hace que el medio sea anisotrópico, lo que se manifiesta en el tensor dieléctrico ϵ_{ij} . En la configuración de Faraday el tensor dieléctrico se simplifica por simetrías en las componentes que son $\epsilon_{xx}=\epsilon_{yy}$, $\epsilon_{yx}=-\epsilon_{xy}$, $\epsilon_{xz}=\epsilon_{zx}=\epsilon_{yz}=\epsilon_{zy}=0$. En [4] se encuentran las expresiones de estas componentes. Las ecuaciones rotacionales de Maxwell resultan al descomponerse en seis ecuaciones, tres componentes por cada ecuación. Hay que tener en cuenta que se trabajó con materiales no magnéticos así que $\mathbf{B}=\mathbf{H}$. Siguiendo el método planteado en [5] se lograron escribir las componentes bidimensionales de los campos (perpendiculares a la dirección de propagación) en función de las componentes z de los campos

$$E_x = -\frac{1}{\eta^2} \left[\left(\nabla_t + \frac{q_z^2 \epsilon_{yx}}{\sigma^2} \bar{e}_z \times \nabla_t \right) \frac{\partial E_z}{\partial z} - iq_0 \left(\bar{e}_z \times \nabla_t - \frac{q_z^2 \epsilon_{yx}}{\sigma^2} \nabla_t \right) B_z \right]$$

$$B_x = -\frac{1}{\eta^2} \left[\left(\nabla_t + \frac{q_z^2 \epsilon_{yx}}{\sigma^2} \bar{e}_z \times \nabla_t \right) \frac{\partial B_z}{\partial z} + iq_0 \left(\frac{\epsilon_{yx}}{\sigma^2} \nabla_t \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \left(\epsilon_{yx} - \frac{q_z^2 \epsilon_{yx}}{\sigma^2} \right) \bar{e}_z \times \nabla_t E_z \right) \right]$$

donde $q_0=\omega/c$, $\sigma^2=\kappa^2-q_0^2 \epsilon_{xx}$, $\eta^2=\sigma^2+(q_0^2 \epsilon_{xx}/\sigma)^2$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Es de anotar que estas ecuaciones son generales en el sentido que son independientes del sistema de coordenadas que se adopte, además que para el caso $\mathbf{B}_0=0$ ($\epsilon_{yx}=0$) se llega exactamente a las obtenidas en [5].

Por otra parte, la idea de la BBS se logra matemáticamente multiplicando las ecuaciones anteriores por la función de Heaviside $\theta(\rho-R)$ o $\theta(R-\rho)$, como sea el caso considerado; así estas ecuaciones son válidas solo para $\rho > R$ o $\rho < R$ con R como el radio del cilindro en cuestión. Las relaciones para $E_z(\rho, \theta)$ y $B_z(\rho, \theta)$ son

$$\left(i \frac{q_z^2 \epsilon_{yx}}{\sigma^2} \right) \left[\left(\nabla^2 - \sigma^2 \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_{xx}} \right) E_z + \kappa q_0 \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_{xx}} B_z - \delta(R-\rho) \left(\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\kappa}{q_0 \epsilon_{xx} \rho} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (5a)$$

$$\left(i \frac{q_z^2 \epsilon_{yx}}{\sigma^2 - \frac{q_0^2 \epsilon_{yx}^2}{\sigma^2}} \right) \left[\left(\nabla^2 - \sigma^2 + \frac{q_0^2 \epsilon_{yx}^2}{\sigma^2} \right) B_z - \kappa q_0 \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_{xx}} E_z - \delta(R-\rho) \left(\frac{\partial B_z}{\partial \rho} + \frac{\epsilon_{yx}}{\epsilon_{xx} \rho} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\kappa}{q_0 \epsilon_{xx} \rho} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (5b)$$

donde $\nabla^2 = \partial^2/\partial \rho^2 + (1/\rho)\partial/\partial \rho + (1/\rho^2)\partial^2/\partial \theta^2$.

Para $B_0=0$, se obtienen exactamente las ecuaciones principales de trabajo (2,14) y (2,15) de [1]. Nótese que el campo magnético externo acopla las componentes E_z y B_z , razón por la cual resolver exactamente (2) no es nada sencillo.

LÍMITE SIN EFECTOS DE RETARD

En ausencia de efectos de retardo (o límite electrostático[4]) se asume que $\kappa \gg q_0$ ($c \rightarrow \infty$ ($q_0=0$)). En este régimen claramente en (5a, b) E_z y B_z se desacoplan, y las funciones de Green G_{Ez} y G_{Bz} se pueden hallar de manera exacta. El manejo del operador V debe hacerse con cuidado en este límite considerado ya que (mirar (6)) hay términos que poseen $1/q_0$. Afortunadamente estos términos se encontrarán con sus inversos aditivos cuando se calculan la función inversa de respuesta para cada sistema considerado en la Fig. 1. El término $\epsilon_{yx}/\epsilon_{xx}$ que está presente en V se desprecia (pequeños campos) tal y como se anota en [4], encontrándose que el término ϵ_{yx} abandona por completo las relaciones (6), pudiendo esto significar que sin efectos de retardo el campo transversal (Hall) es despreciable. De esta forma en este límite no se espera encontrar helicones.

La relación de dispersión para el caso de un plasma cilíndrico rodeado por un dieléctrico (fig1A), es de la forma $\epsilon_{xx}(\epsilon_{zz}/\epsilon_{xx})^{1/2} [J'_m(iR\beta)/J_m(iR\beta)] - \epsilon_2 [H'_m(iR\beta)/H_m(iR\beta)] = 0$, con $\beta = \kappa(\epsilon_{zz}/\epsilon_{xx})^{1/2}$, siendo m el orden de las funciones de Bessel J_m y H_m . Notar que cuando $R \rightarrow \infty$ ($m=0$ por ejemplo $H'_0/H_0=i$ y $J'_0/J_0=-i$) la relación de dispersión es de la forma $\epsilon_{xx}(\epsilon_{zz}/\epsilon_{xx})^{1/2} = \epsilon_2$; justo lo que se espera ya que en el límite $R \rightarrow \infty$ el sistema es equivalente a una superficie plana separando los dos medios, problema tratado en [3]. En la figura 2 se ilustran las curvas de dispersión (los ceros de (7)) de magnetoplasmones para un cilindro de plasma GaAs inmerso en un dieléctrico Ga_{1-x}A_xAs para $m=0,2,3,5$. Como en [1], se toma el parámetro adimensional de plasma $\omega_p R/C = 2^{0.5}$. Los ejes de coordenadas se presentan en términos del vector de onda adimensional $\zeta = c\kappa/\omega_p$ y frecuencia adimensional $\xi = \omega/\omega_p$ donde ω_p se refiere a la frecuencia de plasma apantallada y se toma $\omega_c/\omega_p = 0.1$ siendo ω_c la frecuencia ciclotrónica.

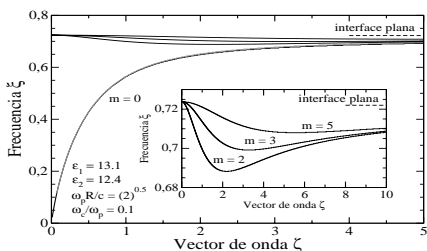


Fig. 2. Curva de dispersión para magnetoplasmones para diferentes ordenes m de la función de Bessel de un cilindro de plasma GaAs ($\epsilon_1=13.1$) inmerso en un dieléctrico Ga $_1$ -xAl $_x$ As ($\epsilon_2=13.1$). La línea punteada corresponde al límite $R \rightarrow \infty$ simulando una superficie

Para cada m existe un modo que tiende al valor de la relación de dispersión para el caso de interface plana indicada con una línea punteada en la parte superior derecha. Algo importante de anotar es que a medida que m aumenta la frecuencia aumenta, carácter que se mantiene y es ilustrado en el recuadro inferior de la Fig. 2, que corresponde a una ampliación de las curvas para $m=2,3$ y 5 ; además, tanto la geometría del sistema como la presencia del campo magnético externo hace que la curva de dispersión sea bien distinta a lo que se presenta para una interface plana. En dicha figura también se ilustran las curvas de dispersión para $m=0$ con campo y sin campo; las diferencias consisten en la franja donde ocurren estas curvas. Para el caso de ausencia de campo la curva se da en la región $0 < \xi < (1 + \epsilon_2/\epsilon_1)^{-1/2}$ [1]; cuando se aplica el campo $(\omega_c/\omega_p) < \xi < (\epsilon_{xx}(\epsilon_{zz}/\epsilon_{xx})^{1/2} = \epsilon_2)$. Se concluye así que cuando el campo está presente, se alcanzan frecuencias un poco mayores $((1 + \epsilon_2/\epsilon_1)^{-1/2} \approx 0.7167, (\epsilon_{xx}(\epsilon_{zz}/\epsilon_{xx})^{1/2} = \epsilon_2) \rightarrow \omega/\omega_p \approx 0.722)$ pero no existen frecuencias por debajo de la frecuencia ciclotrónica.

CONCLUSIONES

Se logró hacer las extensiones de las relaciones generales de [1] para el caso de un campo magnético externo en la configuración de Faraday. Trabajando en el límite $c \rightarrow \infty$ (límite no retardado) se desacoplan las ecuaciones permitiendo calcular explícitamente las funciones inversas de repuesta de los sistemas cilíndricos de una y dos interfaces, para luego obtener sus respectivas relaciones de dispersión. Para el caso de una interface se computa el poder espectral de los magnetoplasmones observando que la presencia del campo magnético hace que los modos tiendan a un valor de frecuencia un poco mayor que cuando no está, sin embargo, no existen frecuencias por debajo de la frecuencia ciclotrónica.

El método de la BBS usado en [1] para obtener las funciones de respuesta de sistemas cilíndricos usando teoría de funciones de Green resulta ser herramienta útil al tratar de obtener éstas funciones considerando un campo magnético externo.

REFERENCIAS

[1] M.S. Kushwaha and Djafari-Rouhani, *Phys. Rev. B* **67**, 245320 (2003).
 [2] L. Dobrzynski, *Rep* **6**, 113 (1986); *Surf. Sci.* **300**, 1008 (1994).
 [3] M.S. Kushwaha, *Surf. Sci. Rep.* **41**, 1 (2001).
 [4] M.S. Kushwaha and P. Halevi, *Phys. Rev. B* **35**, 3879 (1987).
 [5] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 1962).