Revista Colombiana de Física,Vol. 41, No.2, Abril 2009

Dinámica de las PerturbacionesS Adiabáticas y de Entropía en Inflación con Múltiples Campos Escalares

F. D. Villalba-Pardo [a], C. J. Quimbay [a]

[a]*Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia*

Recibido 23 de Oct. 2007; Aceptado 6 de Mar. 2009; Publicado en línea 30 de Abr. 2009

Resumen

Estudiamos la dinámica de las perturbaciones cosmológicas en el marco de inflación con múltiples campos escalares, distinguiendo las perturbaciones como adiabáticas ó de entropía. Para hacer esto revisamos inicialmente el modelo inflacionario con varios campos escalares en la aproximación de slow-roll, introduciendo el concepto de atractor inflacionario para validar dicha aproximación. Abordamos el problema de las perturbaciones cosmológicas en inflación con varios campos escalares y revisamos los conceptos de perturbaciones adiabáticas y de entropía en este contexto. A partir de la obtención de las ecuaciones de movimiento de tales perturbaciones, que describen su dinámica durante la etapa inflacionaria, notamos que dentro de la aproximación de slow-roll las perturbaciones de entropía se anulan a nivel de escalas de superhorizonte y que éstas pueden llegar a no desaparecer fuera de esta aproximación.

***Palabras Clave*:** Múltiple inflación, perturbaciones cosmológicas, perturbaciones adiabáticas y de entropía, aproximación de slow-roll.

Abstract

We study the dynamics of the cosmological perturbations in the framework of multiple field inflation, making a splitting between adiabatic and entropy perturbations. To do it we initially review the inflationary model with multiple scalar fields in the slow-roll approximation, introducing the concept of inflationary attractor in order to validate this approximation. We consider the problem of cosmological perturbations in this framework and review the concepts of adiabatic and entropy perturbations in this context. Starting from the equations of motion of these, which describe its dynamics during the inflation era, we note that within the slow-roll approximation the entropy perturbations vanish on superhorizon scales and these could no disappear outside this approximation.

***Keywords*:** Multiple field inflation, cosmological perturbations, adiabatic and entropy perturbations, slow-roll approximation.

1. Introducción

El paradigma actual en cosmología tiene como uno de sus elementos más esenciales la idea de inflación. Esta idea fue propuesta como una posible solución a los problemas de planitud y horizonte presentes en el modelo del Big-Bang. No obstante, la propiedad fundamental que posee inflación y que la hace atractiva teóricamente es la posibilidad de generar estructura a gran escala en el Universo partiendo de fluctuaciones cuánticas de un campo escalar denominado inflatón [1]. Estas fluctuaciones son el origen de la anisotropía cósmica de fondo descubierta por el satélite COBE en 1992 y estudiadas recientemente por el satélite WMAP.

Existen diversas maneras de describir las inhomogeneidades observadas en la radiación cósmica de fondo, sin embargo la alternativa más simple y más estudiada se fundamenta en un campo cuántico escalar en una variedad de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plana. Se realizan ciertas suposiciones adicionales para simplificar el modelo con lo cual se predice un espectro de perturbaciones gaussiano invariante de escala [1]. Debido a la llegada de datos cada vez más precisos se han relajado estas suposiciones con el fin de buscar consecuencias observables, por ejemplo modelos con más de un campo escalar [2]. Como rasgo distintivo de estos modelos se tiene que un tipo especial de perturbación denominado de isocurvatura ó entropía puede contribuir a la estructura observada, lo cual no pasa en modelos con un sólo campo en donde únicamente contribuyen las llamadas perturbaciones adiabáticas.

En este trabajo estudiamos la dinámica de las perturbaciones cosmológicas en este contexto, examinando el problema de las perturbaciones de isocurvatura y adiabáticas. Inicialmente, en la sección , se plantea a grandes rasgos el modelo y las condiciones para que se produzca inflación, resaltando el papel del atractor inflacionario como justificación de la aproximación de slow-roll. Posteriormente, en la sección , se presenta la descripción de las perturbaciones cosmológicas y se introducen los conceptos de perturbación adiabática y de entropía, mostrando las ecuaciones que rigen su evolución. Finalmente, en la sección 1, se discuten los resultados y se presentan algunas conclusiones.

2. Inflación con varios campos escalares

El sistema de N campos escalares está descrito por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} f_{IJ} g^{\mu\nu} \phi^I_{,\mu} \phi^J_{,\nu} - W(\phi), \tag{1}$$

donde $g^{\mu\nu}$ denota la métrica espacio-temporal, $W(\phi)$ es el potencial con términos tanto de masa como de interacción y donde usamos la notación de coma para las derivadas y la convención de suma en todos los índices, con $I, J = 1, ..., N$. A partir de trabajos que involucran términos cinéticos no convencionales [3], suponemos que el conjunto de campos define una variedad de dimensión N con métrica f. Gracias a la homogeneidad e isotropía podemos establecer que los campos no dependen de las coordenadas espaciales.

El espacio-tiempo está es descrito por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker con el parámetro de curvatura k igual a cero [1]. En este caso la ecuación de Friedmann es

$$H^2 = \frac{4\pi G}{3} \left(f_{IJ} \dot{\phi}^I \dot{\phi}^J + 2W(\phi) \right), \tag{2}$$

donde el punto denota derivada con respecto al tiempo cósmico y $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble. La condición de inflación para la presión y la densidad de energía, $p < -\rho/3$, implica que

$$W(\phi) > f_{IJ} \dot{\phi}^I \dot{\phi}^J, \tag{3}$$

siendo ésta la condición para que el modelo describa una etapa inflacionaria. A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{\phi}^I + 3H\dot{\phi}^I + W^{,I} + \Gamma^I_{JK} \dot{\phi}^J \dot{\phi}^K = 0, \tag{4}$$

donde Γ^I_{JK} es la conexión afín asociada a la métrica f. Con el propósito de simplificar las expresiones y motivados por (3), suponemos que los campos decaen lentamente. De este modo las contribuciones a la presión y a la densidad de energía son debidas prácticamente al potencial y por lo tanto se puede despreciar el término de segundo orden en (4). Este proceso se conoce como aproximación de slow-roll [1] y reduce el orden de las ecuaciones de movimiento, como es evidente en (4). No obstante, es importante señalar que queda una ambigüedad debida a la condicíon inicial de las derivadas, la cual se resuelve con el atractor inflacionario. Este concepto fue introducido en [4] y se basa en la formulación de inflación en términos de una ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\begin{aligned} &\sum_{I=1}^{N} [\partial_{\phi_I} H(\phi)]^2 - \frac{3}{2M_{pl}} H^2(\phi_1, ..., \phi_N) \\ &= -\frac{1}{2M_{pl}^4} V(\phi_1, ..., \phi_N), \end{aligned} \tag{5}$$

donde se ha tomado una métrica trivial para los campos. Considerando dos soluciones que difieren en el parámetro de Hubble por una cantidad δH, tenemos que esta diferencia obedece la ecuación linealizada (6a) con solucion (6b)

$$\sum_{I=1}^{N} \partial_{\phi_I} H_0 \partial_{\phi_I} \delta H \approx \frac{2}{3M_{pl}^2} H_0 \delta H \tag{6a}$$

$$\begin{aligned} &\delta H(\phi_1, ..., \phi_N) = \delta H(\phi_1^0, ..., \phi_N^0) \\ &\times exp \left[\frac{2}{3M_{pl}^2} \sum_{I=1}^{N} \int_{\phi_I^0}^{\phi_I} C_I \left(\frac{H_0}{\partial_{\phi_I'} H_0} \right) d\phi_I' \right] \end{aligned} \tag{6b}$$

donde C_I son constantes que satisfacen $C_I \geq 0$ y $\sum_{I=1}^{N} C_I = 1$. A partir de consideraciones básicas, con respecto a la evolución inflacionaria, puede verse que el exponente de (6b) tiende a $-\infty$ conforme avanza la solución, es decir las soluciones diferentes tienden a acercarse. Esto justifica una descripción en términos de una solución de slow-roll, dado que las que difieran van a tender rápidamente a ésta.

3. Perturbaciones cosmológicas

Las correcciones cuánticas a los campos escalares se incluyen de manera efectiva en los campos corregidos ϕ^I_{corr}, si se escriben éstos como $\phi^I_{corr}(\vec{x},t) = \phi^I(t) + \delta\phi^I(\vec{x},t)$, de tal forma que los campos ϕ^I dominan en la densidad de energía y provocan la inflación, mientras que los campos que representan las perturbaciones $\delta\phi^I$ causan pequeñas inhomogeneidades que se traducen en la estructura a gran escala. Puesto que las perturbaciones en la densidad de energía y momentum conllevan a las perturbaciones en la geometría, debemos incluir perturbaciones en la métrica

$$\begin{aligned} ds^2 = &-(1+2A)dt^2 + 2a\partial_i B dt dx^i \\ &+ a^2\left[(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}\right]dx^i dx^j . \end{aligned} \tag{7}$$

Las funciones A, B, ϕ y E son suficientes para describir perturbaciones cosmólogicas escalares, no obstante algunas de ellas pueden reflejar efectos no físicos que deben ser removidos [5]. Para visualizar las posibles consecuencias de este tratamiento, vamos a restringirnos al caso de dos campos $\phi_{1,2} = \phi, \sigma$, con una métrica $f_{IJ} = diag(1, e^{-2h(\phi)})$. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Einstein, obtenemos las ecuaciones de movimiento para los campos perturbación y las perturbaciones de la métrica [5].

Para analizar de una manera más conveniente estas perturbaciones es conveniente introducir los conceptos de perturbaciones adiabáticas y de entropía. Toda perturbación que obedezca una ecuación de estado igual a la de los campos no perturbados es una perturbación adiabática [1], mientras que una perturbación de entropía es aquella que no satisface dicha ecuación. Con lo anterior, es posible demostrar que las perturbaciones adiabáticas corresponden a perturbaciones a lo largo de la trayectoria del sistema en el espacio de campos y que las perturbaciones de entropía son ortogonales a dicha trayectoria [2]. Basados en lo anterior, podemos analizar las perturbaciones de una manera más clara haciendo una reparametrización que haga evidente la evolución de los modos adiabáticos (χ) y de entropía (s). Con lo anterior obtenemos que

$$\delta\chi = \cos\theta\delta\phi + e^{-h}\sin\theta\delta\sigma, \tag{8}$$

$$\delta s = -\sin\theta\delta\phi + e^{-h}\cos\theta\delta\sigma, \tag{9}$$

$$\cos\theta = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + e^{-2h}\dot{\sigma}^2}} \tag{10}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{-h}\dot{\sigma}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + e^{-2h}\dot{\sigma}^2}}.$$

Se puede probar que las perturbaciones adiabáticas son debidas únicamente al campo $\delta\chi$, por lo tanto es relevante conocer cómo evoluciona esta perturbación. Teniendo en cuenta su definición, hallamos la ecuación de movimiento a partir de las ecuaciones de los campos iniciales. La ecuación resultante es complicada debido a la presencia de $h(\phi)$, por lo cual consideramos una versión aproximada, tomando h' pequeño, [1] obteniendo:

$$\begin{aligned} &\delta\ddot{\chi} + (3H + 2h'\sin^2\theta\cos\theta\dot{\chi})\delta\dot{\chi} \\ &+ \left(-\frac{\nabla^2}{a^2} - \theta^2 + W_{,\chi\chi} + 2h'\sin^3\theta\dot{\chi}\dot{\theta}\right)\delta\chi \\ &- (2\dot{\theta} + 2h'\sin^3\theta\dot{\chi})\delta\dot{s} \\ &+ \left(-3H\dot{\theta} - \ddot{\theta} + W_{s\chi} + 2h'\sin^2\theta\cos\theta\dot{\chi}\dot{\theta}\right)\delta s \\ &= -2AW_{,\chi} + \left[\dot{A} + 3\dot{\psi} + \frac{k^2}{a^2}(a^2\dot{E} - aB)\right]\dot{\chi} \end{aligned} \tag{11}$$

A partir de esta ecuación diferencial podemos ver que los términos dependientes de δs actúan como fuentes. En el marco de slow-roll se obtiene un desacople para $h = 0$ a gran escala (despreciando las derivadas espaciales), ya que $\dot{\theta} = 0$. Esto causa que las perturbaciones adiabáticas sean las que producen estructura a gran escala [2] y las perturbaciones de entropía se anulan. En el caso general, tenemos que los términos adicionales producen efectos sobre las perturbaciones de entropía, aún en el caso de gran escala.

3. Discusión y conclusiones

Podemos observar que la presencia de términos cinéticos no convencionales provoca la correlación entre perturbaciones adiabáticas y de entropía a gran escala, lo cual no sucede en el caso estándar de un campo. Las implicaciones de este hecho pueden ser detectadas, en principio, a partir de las medidas del espectro de anisotropía de la radiación cósmica de fondo, por lo cual es importante llegar a predicciones concretas para estas cantidades en términos de los parámetros del modelo.

Es importante recalcar el papel del atractor inflacionario en la dinámica del modelo, ya que si la evolu-

[1] Lo cual se entiende físicamente en términos de teorías de gravedad escalar-tensor cercanas a la relatividad general [3]

ción tiende a slow-roll se puede tener desacople entre los dos tipos de perturbaciones, lo cual reproduce los resultados estándar.

Referencias

[1] A. R. Liddle y D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, 2000).

[2] C. Gordon, D. Wands, B. A. Bassett y R. Maartens, Phys. Rev. **D63**, 023506 (2001).

[3] J. García-Bellido y D. Wands, Phys. Rev. **D53**, 5437 (1996).

[4] D. S. Salopek y J. R. Bond, Phys. Rev. **D42**, 3936 (1990).

[5] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman y R. H. Brandenberger, Phys. Rept. **215**, 203 (1992).