



Propagador Fermiónico a Temperatura Finita en Presencia de un Campo Magnético Externo

F. D. Villalba-Pardo^a, C. J. Quimbay^a

^aDepartamento de Física, Universidad Nacional de Colombia

Recibido 23 de Oct. 2007; Aceptado 6 de Mar. 2009; Publicado en línea 30 de Abr. 2009

Resumen

Obtenemos el propagador fermiónico para un sistema estadístico de fermiones cargados en presencia de un campo magnético externo. Esto se logra introduciendo la imagen de estado ligado para la evolución temporal de los operadores, la cual usa las funciones de onda solución de la ecuación de Dirac con el fin de especificar la forma del operador de campo fermiónico. Tales soluciones, en este caso, son las del efecto Hall cuántico relativista, las cuales presentan niveles de energía discretos. Con dichas soluciones encontramos expresiones para el propagador a temperatura cero y a temperatura finita. El propagador obtenido presenta una dependencia explícita del campo magnético externo y es consistente en el límite de campo magnético nulo. Por último realizamos un análisis de los resultados obtenidos. .

Palabras Clave: Propagador fermiónico, temperatura y densidad finita, campo magnético externo.

Abstract

We obtain the fermionic propagator for a statistical system of charged fermions in an external magnetic field. This is achieved by introducing the bound-state picture for time evolution of the operators, which uses the solutions of the Dirac equation in order to specify the fermionic field operator's form. Such solutions are those of the relativistic quantum Hall effect, showing discrete energy levels. With these solutions we find the fermionic propagator at zero and a finite temperature. The obtained propagator shows an explicit dependence on the external magnetic field and reduces to the conventional one in the vanishing field limit. Finally we perform an analysis of the obtained results.

Keywords: fermionic propagator, finite temperature and density, external magnetic field.

©2009. Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

1. Introducción

Existen diferentes tipos de sistemas físicos en donde están presentes campos magnéticos de gran intensidad que afectan la dinámica de las partículas que los constituyen. Por ejemplo, en sistemas astrofísicos como las supernovas y las estrellas de neutrones están presentes campos magnéticos del orden de 10^{10} T y 10^8 T, respectivamente. De igual forma, en el ámbito de la cosmología, se supone que durante la etapa de nucleosínte-

sis se presentaron fluctuaciones del campo magnético en el plasma primordial del Universo del orden de 10^{10} T [1]. Para estudiar los efectos del campo magnético sobre la dinámica de las partículas cargadas que constituyen el sistema, se debe tener en cuenta aspectos como la temperatura y densidad del medio.

El principal objetivo de este trabajo es obtener el propagador fermiónico para el sistema definido por un gas de fermiones cargados inmerso en un campo magnético externo de gran intensidad y determi-

nar la dependencia del propagador fermiónico respecto al campo magnético. El conocimiento del propagador fermiónico es fundamental para poder determinar las propiedades de propagación de los fermiones en este sistema, haciendo uso de técnicas diagramáticas [2]. Inicialmente, en la sección , mostramos el formalismo general que permite describir la dinámica de los fermiones al involucrar campos externos en el sistema, introduciendo la imagen de estado ligado para la evolución temporal, y obtenemos las funciones de onda que son usadas para describir los fermiones en este contexto. En la sección obtenemos los propagadores fermiónicos a temperatura cero y a temperatura finita. Por último, en la sección , se discuten los resultados obtenidos y se presentan algunas conclusiones.

2. Fermiones en campos externos a temperatura cero

Con el fin de introducir los efectos del campo externo de una manera no perturbativa es conveniente trabajar en una nueva imagen para la evolución temporal de los operadores, la imagen de estado ligado [3]. En esta imagen la evolución se determina a partir del hamiltoniano del sistema, el cual se escribe como el hamiltoniano del sistema libre más un término de interacción del fermión con un campo electromagnético externo \mathcal{A} . Siguiendo la notación y convenciones de [4], se tiene que la ecuación para el campo de Dirac en esta imagen es

$$\left[i\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - m - e\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] \psi(x) = 0. \quad (1)$$

Las funciones de onda de Dirac se definen en términos de los estados de una partícula como

$$u(x; \vec{p}, \sigma) = \langle 0 | \psi(x) | \vec{p}, \sigma \rangle, \quad (2)$$

$$v(x; \vec{p}, \sigma) = \langle \vec{p}, \sigma | \psi(x) | 0 \rangle. \quad (3)$$

Se sigue de (1) que estas funciones satisfacen las ecuaciones de Dirac homogéneas:

$$\left[i\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - m - e\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] u(x; \vec{p}, \sigma) = 0, \quad (4a)$$

$$\left[i\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - m - e\gamma^\lambda \mathcal{A}_\lambda(x) \right] v(x; \vec{p}, \sigma) = 0. \quad (4b)$$

Solucionando estas ecuaciones podemos escribir el campo fermiónico como

$$\psi(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} [u(x; \vec{p}, \sigma) a(\vec{p}, \sigma) + v(x; \vec{p}, \sigma) a_c^\dagger(\vec{p}, \sigma)], \quad (5)$$

donde los operadores creación y aniquilación $a_c^\dagger(\vec{p}, \sigma)$ y $a(\vec{p}, \sigma)$ crean un positrón y destruyen un electrón, respectivamente. Con el fin de especificar la forma del campo fermiónico en la imagen de estado ligado (5), debemos resolver las ecuaciones de Dirac (4a) y (4b). Para esto consideramos el caso particular de un campo magnético homogéneo paralelo al eje z e independiente del tiempo (B), con lo cual, en un gauge conveniente el cuadripotencial tiene la forma

$$\mathcal{A}_\mu = (0, 0, Bx, 0). \quad (6)$$

Teniendo en cuenta las simetrías de este problema, podemos resolver (4a) y (4b) de manera análoga a como se realiza en [5], obteniendo que

$$u(x; \vec{p}, n, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(E_{\vec{p},n}x_0 + p_2x_2 + p_3x_3)}}{\sqrt{2E_{\vec{p},n}}} \times \sqrt{E_{\vec{p},n} + p_3} \phi_{\lambda, \vec{p}, n}^+, \quad (7)$$

$$v(x; \vec{p}, n, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i(-E_{\vec{p},n}x_0 + p_2x_2 + p_3x_3)}}{\sqrt{2E_{\vec{p},n}}} \times \sqrt{E_{\vec{p},n} - p_3} \phi_{\lambda, \vec{p}, n}^-, \quad (8)$$

con $\lambda = 1, 2$. Las funciones $\phi_{\lambda, \vec{p}, n}^\pm$ dependen únicamente de x y están dadas por

$$\phi_{1, \vec{p}, n}^+(x) = \begin{pmatrix} (E_{\vec{p},n} + p_3)I_{n;p_2} \\ -i\sqrt{2eBn}I_{n-1;p_2} \\ -mI_{n;p_2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi_{2, \vec{p}, n}^+(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -mI_{n-1;p_2} \\ -i\sqrt{2eBn}I_{n;p_2} \\ (E_{\vec{p},n} + p_3)I_{n-1;p_2} \end{pmatrix},$$

$$\phi_{1, \vec{p}, n}^-(x) = \begin{pmatrix} -mI_{n;-p_2} \\ 0 \\ (p_3 - E_{\vec{p},n})I_{n;-p_2} \\ i\sqrt{2eBn}I_{n-1;-p_2} \end{pmatrix},$$

$$\phi_{2, \vec{p}, n}^-(x) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2eBn}I_{n;-p_2} \\ (p_3 - E_{\vec{p},n})I_{n-1;-p_2} \\ 0 \\ -mI_{n-1;-p_2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} mI_{n,n} & 0 & -(E+p_3)I_{n,n} & -i\sqrt{2eBn}I_{n,n-1} \\ 0 & mI_{n-1,n-1} & i\sqrt{2eBn}I_{n-1,n} & (p_3-E)I_{n-1,n-1} \\ -(E-p_3)I_{n,n} & i\sqrt{2eBn}I_{n,n-1} & mI_{n,n} & 0 \\ -i\sqrt{2eBn}I_{n-1,n} & -(E+p_3)I_{n-1,n-1} & 0 & mI_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

donde las funciones I tienen la forma

$$I_{n;p_2}(x) = \left(\frac{eB}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}eB(x-\frac{p_2}{eB})^2} \times \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n \left[\sqrt{2eB} \left(x - \frac{p_2}{eB}\right)\right], \quad (10)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ y H_n como los polinomios de Hermite, y el valor propio de energía es

$$E_{\vec{p},n} = \sqrt{m^2 + p_3^2 + 2eBn}. \quad (11)$$

Estas soluciones surgen en el contexto del efecto Hall cuántico relativista, al considerar las energías posibles del electrón en un material (ignorando la mayor parte de los efectos de la red). A los valores propios de energía obtenidos se le llama niveles de Landau.

3. Propagadores fermiónicos

El propagador fermiónico a temperatura y densidad finitas lo encontramos a partir de su definición, tomando el promedio sobre el conjunto estadístico con temperatura fija β^{-1} y potencial químico μ , esto es

$$-iS_F^{\beta,\mu}(x, y) = \langle T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} \rangle_{\beta,\mu} = \frac{Tr[\psi(x)\bar{\psi}(y)e^{-\beta(H-\mu_i N_i)}]}{Tr[e^{-\beta(H-\mu_i N_i)}]}, \quad (12)$$

donde $i = 1, 2$ denota cantidades relacionadas con fermiones y antifermiones. Colocando de manera explícita el ordenamiento temporal y usando (5), se llega a que el propagador se divide en una parte a temperatura cero y otra a temperatura finita. Esta última parte involucra promedios de operadores aniquilación y creación y productos diádicos de los espinores solución de las ecuaciones de Dirac (4a) y (4b). Al calcular las trazas con respecto a estados de número y suponer que el campo magnético externo B es muy intenso, podemos despreciar la interacción interpartícula llegando a que estas trazas son

$$\langle a^\dagger(q)a(q) \rangle_{\beta,\mu} = \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)_q}}. \quad (13)$$

Realizando un cambio de variable para expresar los

propagadores en términos de la energía, obtenemos que la parte a temperatura cero del propagador es

$$S_F^{vac}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{dE dp_2 dp_3}{(2\pi)^3} S(n; E, p_2, p_3) \times \frac{e^{-i[E(x_0-y_0)-p_2(x_2-y_2)-p_3(x_3-y_3)]}}{E^2 - E_{\vec{p},n}^2 + i\epsilon}, \quad (14)$$

mientras que la parte a temperatura finita es

$$S_F^{th}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{dE dp_2 dp_3}{(2\pi)^3} e^{-i[E(x_0-y_0)-p_2(x_2-y_2)-p_3(x_3-y_3)]} \times 2\pi i \delta(E^2 - E_{\vec{p},n}^2) \times \left(\theta(E) \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} + \theta(-E) \frac{1}{e^{-\beta(E-\mu)} + 1} \right) \times S(n; E, p_2, p_3), \quad (15)$$

donde $E_{\vec{p},n}$ es la energía de los niveles de Landau y la matriz $S(n; E, p_2, p_3)$ es el producto diádico de los espinores y está dada por la matriz (9)

con $I_{n,n'} = I_{n,p_2}(x)I_{n',p_2}(x)$. Usando las propiedades de las funciones de Hermite se puede mostrar que en el límite $B \rightarrow 0$ este propagador corresponde a las expresiones estándar para el orden cero de teoría de perturbaciones [2].

4. Discusión y Conclusiones

Hemos encontrado el propagador fermiónico para un gas de fermiones cargados a temperatura y potencial químico finitos en presencia un campo magnético externo intenso B . Gracias al formalismo de la imagen de estado ligado fue posible estudiar los efectos de B de manera no perturbativa, como es apropiado en estos casos [4]. El propagador fermiónico, que se ha podido separar en una parte a temperatura cero y otra a temperatura finita, muestra una forma análoga a la del caso convencional, con la diferencia de que en este caso B rompe la invariancia de Lorentz, lo cual se manifiesta

en que el propagador ya no depende de las coordenadas en la forma sencilla $(x - y)$.

Con respecto al propagador a temperatura cero vemos que la matriz $\gamma^\mu p_\mu + m$ que aparece usualmente es reemplazada por un objeto que tiene una forma mucho más compleja, lo cual refleja los efectos de B y evidencia que la simetría traslacional se sigue preservando en los ejes y , z y t . Adicionalmente los polos del propagador aparecen en las energías de los estados ligados, siendo esta la razón para que las energías observadas sean los niveles de Landau. Con respecto al propagador a temperatura finita encontramos que su estructura es muy similar a la del caso usual, dado que aparece una función delta restringiendo que las energías

de las partículas térmicas correspondan a los niveles de Landau (on-shell). En adición, la presencia de la distribución de Fermi-Dirac también es una característica general de este tipo de propagadores [2].

Referencias

- [1] T. Tajima et. al., *Astrophys. J.* **390**, 309 (1992).
- [2] J. L. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, 1989)
- [3] W. H. Furry, *Phys. Rev.* **81**, 115 (1951).
- [4] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, 1995).
- [5] M. Kobayashi y M. Sakamoto, *Prog. Theor. Phys.* **70**, 1375 (1983).