



Ecuaciones generalizadas de Friedmann para un modelo de una brana con la simetría Z_2 rota

Generalized Friedmann equations for a brane model with broken symmetry Z_2

L.N. Granda ^a, A. Oliveros ^a

^aDepartamento de Física, Universidad del Valle. A.A. 25360, Cali, Colombia

Recibido 15 de may. 2009; Aceptado 2 de sep. 2009; Publicado en línea 30 de sep. 2009

Resumen

Estudiamos un sistema cerrado de ecuaciones para una brana inmersa en un espacio volumen 5-dimensional, la cual separa dos espacios volumen con diferentes constantes cosmológicas y acoplamientos Newtonianos, rompiendo de este modo la simetría de reflexión Z_2 . En este caso no consideramos la presencia de materia en el espacio volumen, pero si tenemos en cuenta un término que contiene la curvatura escalar de la métrica inducida sobre la brana, el cual, conduce a una modificación de la cosmología estandar sobre la brana. Se obtienen también las ecuaciones modificadas de Friedmann.

Palabras Clave: Teorías alternativas de la gravitación, Gravitación en más de cuatro dimensiones, Cosmología.

Abstract

We study the closed system of equations for a brane embedded in a five-dimensional bulk space, separating two bulk volumens with different cosmological constants and Newtonian couplings, breaking the Z_2 symmetry of reflection. We do not consider matter content in the bulk, but include the term containing the scalar curvature of the induced metric on the brane, which leads to modification of the standard brane cosmology. The modified Friedmann's equations are obtained.

Keywords: Alternative theories of gravitation, Gravitation in more than four dimensions, Cosmology

©2009. Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

1. Introducción

La idea de introducir dimensiones extra fue propuesta inicialmente a comienzos del siglo XX por Nordström y pocos años después por Kaluza y Klein [1]. En los últimos tiempos ésta idea ha sido nuevamente retomada en las teorías que tratan de combinar los principios de la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Relatividad General, en particular aquellas basadas en el principio de supersimetría, especialmente las teorías de supercuerdas; que se expresan de una manera natural en más de cuatro dimensiones [2]. En este caso, la física usual

en 4D se obtiene a través del mecanismo de reducción de Kaluza-Klein, es decir, se compactifican las dimensiones adicionales sobre una variedad de tamaño muy pequeño (del orden de la escala de Planck).

Desarrollos recientes en la teoría de cuerdas y la teoría M han sugerido otra manera de compactificar las dimensiones extra. De acuerdo a estos planteamientos, el modelo estandar de las partículas elementales se encuentra confinado sobre una hipersuperficie (llamada brana), la cual está inmersa en un espacio de mayor dimensionalidad (llamado espacio volumen, el "Bulk").

Solamente la gravedad y otros tipos de campos, tales como el dilaton, se pueden propagar en el espacio volumen. En este contexto, nuestro universo se puede ver como un objeto tipo brana. Esta idea surgió originalmente de manera fenomenológica (ver [3]-[7]) y tiempo despues retomada en la teoría de cuerdas. Dentro del escenario de los mundos brana, las restricciones sobre el tamaño de las dimensiones extra no son tan fuertes. Debido a esto, el modelo estándar de las partículas elementales esta confinado en tres dimensiones espaciales. Sin embargo, la ley de gravitación de Newton, es sensible a la presencia de dimensiones extra. Hasta ahora la ley de gravitación a sido probada solamente hasta escalas de una decima de milímetro y se prevee que puedan surgir desviaciones a la ley a escalas más pequeñas.

Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, los modelos mundos brana tratados en este trabajo, surgen del modelo de Horava y Witten [8] en el cual el límite de acoplamiento fuerte de la teoría heterótica de cuerdas $E_8 \times E_8$ a bajas energías, es descrito por una teoría de supergravitación en once dimensiones, donde la onceava dimensión es compactificada sobre un orbifold dotado con la simetría Z_2 . Las dos fronteras del espacio-tiempo son planos de diez dimensiones sobre los cuales las teorías de gauge están confinadas. Tiempo despues, Witten conjeturó que 6 de las 11 dimensiones se pueden compactificar sobre una variedad de Calabi-Yau, cuyo tamaño puede llegar a ser mas pequeño que el espacio entre las dos branas [9]. Por lo tanto, en ese límite el espacio-tiempo tiene una estructura 5-dimensional con dos branas de cuatro dimensiones inmersas en él [10].

Otro aporte importante a ésta línea de investigación, fue realizado por Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (ADD) ([11], [12]), quienes apartir de la idea inicialmente formulada por Antoniadis [13]; sugirieron que al confinar el modelo estándar de las partículas elementales sobre una brana, el tamaño de la dimensión extra puede llegar a ser mucho más grande de lo que se había anticipado. Ellos consideraron un espacio volumen plano de $(4 + d)$ -dimensiones, en el cual d dimensiones son compactas con radio R (topología toroidal). En este contexto, la masa de Planck 4-dimensional M_P y la masa de Planck en $(4 + d)$ -dimensiones M_{fund} , están relacionadas por

$$M_P^2 = M_{fund}^2 R^d$$

La gravitación presenta desviaciones de la ley de Newton solamente a escalas más pequeñas que R . Además, como ésta se puede probar solamente a escalas de un

milímetro, R deberá ser tan grande como una fracción de un milímetro.

Ahora, considerando que la geometría del espacio volumen no es plana, contrario al modelo de (ADD), Randall y Sundrum propusieron un modelo en el cual el espacio volumen es una rebanada de un espacio-tiempo Anti-de Sitter ([14], [15]), es decir, un espacio-tiempo con una constante cosmológica negativa. Su descubrimiento consistió en que, debido a la curvatura del espacio volumen, la ley de gravitación de Newton puede conservar su estructura sobre la brana de tensión positiva, si se considera que la dimensión extra tiene un tamaño infinito. Con esto, aparecen pequeñas correcciones a la ley de Newton y se restringen las posibles escalas del modelo, por debajo del milímetro.

Usualmente, en los modelos de mundos brana la curvatura escalar sobre la brana no es tenida en cuenta. Pero cuando esto sucede, es posible interpretarla como una corrección cuántica en el sector con contenido material [16,17,18]. En este artículo consideraremos éste término presente en la acción. También, consideraremos que la simetría Z_2 esta rota [19].

Este artículo esta organizado del siguiente modo: En la sección 2 introduciremos las ecuaciones básicas para un modelo que consiste de una brana inmersa en un espacio volumen 5-dimensional, separando los dos volúmenes que poseen diferentes constantes cosmológicas y diferentes acoplamientos gravitacionales. En la sección 3 presentamos las ecuaciones generalizadas de Friedmann sobre la brana. Finalmente, en la sección 4 expondremos algunas conclusiones.

2. Ecuaciones de Campo

Consideremos una brana b la cual separa dos espacios volumen B_1 y B_2 , con diferentes constantes cosmológicas Λ_1 y Λ_2 y masas de Planck M_1 y M_2 respectivamente, rompiendo de este modo la simetría Z_2 . Asumimos por lo tanto que el espacio-tiempo B se divide en dos, $B = B_1 \cup B_2$, con una frontera común b : $\partial B_1 \cap \partial B_2 = b$. La acción para este modelo es

$$S = M_1^3 \left[\int_{B_1} (\mathcal{R}^{(1)} - 2\Lambda_1) - 2 \int_b K^{(1)} \right] + M_2^3 \left[\int_{B_2} (\mathcal{R}^{(1)} - 2\Lambda_2) - 2 \int_b K^{(2)} \right] + \int_{B_1} L_5(g_{ab}^{(1)}, \Phi) + \int_{B_2} L_5(g_{ab}^{(2)}, \Phi) + \int_b (m^2 R - 2\sigma) + \int_b L_4(h_{ab}, \phi) \quad (1)$$

donde, $\mathcal{R}^{(i)}$ son las curvaturas escalares de las métricas 5-dimensionales $g_{ab}^{(i)}$, $i = 1, 2$. R es la curvatura escalar de la métrica inducida $h_{ab}^{(i)} = g_{ab}^{(i)} - n_a^{(i)} n_b^{(i)}$ sobre b , donde $n_a^{(i)}$ son los campos vectoriales unitarios de la normal a b , (escogemos $h_{ab}^{(i)} = h_{ab}$). Las cantidades $K^{(i)} = K_{ab}^{(i)} h^{ab}$ son las trazas de los tensores simétricos de curvatura intrínseca $K_{ab}^{(i)} = h_a^c \nabla_c^{(i)} n_b$ de b en B_1 y B_2 respectivamente. (En éste artículo, usaremos la notación y convenciones de [20]). $L_5(g_{ab}^{(i)}, \Phi)$ denota la densidad lagrangiana de los campos de materia Φ sobre el bulk y $L_4(h_{ab}, \phi)$ es la densidad lagrangiana de los campos de materia 4-dimensionales ϕ , cuya dinámica es restringida a la brana b , tal que ellos interactúan solamente con la métrica inducida h_{ab} [21]. las integraciones sobre B_1 y B_2 , y sobre b son tomadas, respectivamente, con los elementos naturales de volumen $\sqrt{-g^{(i)}} d^5x$ y $\sqrt{-h} d^4x$, donde $g^{(i)}$ y h son los determinantes de las correspondientes métricas. El símbolo m denota la masa de Planck sobre b , Λ_1 y Λ_2 son las constantes cosmológicas sobre B_1 y B_2 , y σ es la tensión sobre la brana.

Realizando la variación de la acción (1) obtenemos las ecuaciones de movimiento para los espacios volumen B_1 y B_2

$$\mathcal{G}_{ab}^{(1)} + \Lambda_1 g_{ab}^{(1)} = \frac{1}{M_1^3} T_{ab}^{(1)} \quad (2)$$

$$\mathcal{G}_{ab}^{(2)} + \Lambda_2 g_{ab}^{(2)} = \frac{1}{M_2^3} T_{ab}^{(2)} \quad (3)$$

y sobre la brana

$$m^2 G_{ab} + \sigma h_{ab} = M_1^3 S_{ab}^{(1)} + M_2^3 S_{ab}^{(2)} + \tau_{ab} \quad (4)$$

donde $\mathcal{G}_{ab}^{(i)}$ y G_{ab} son los tensores de Einstein sobre B_i ($i = 1, 2$) y sobre b , $S_{ab}^{(i)} \equiv K_{ab}^{(i)} - K^{(i)} h_{ab}$, T_{ab} y τ_{ab} son respectivamente los tensores de energía impulso de los campos de materia en 5 y 4 dimensiones .

los tensores $S_{ab}^{(i)}$ se obtienen a partir de los tensores de curvatura extrínseca sobre la brana (un cálculo explícito

se puede ver en el apéndice de [25]) y por lo tanto la ecuación (4) no es cerrada con respecto a la evolución intrínseca de la brana. Utilizaremos el Teorema Egregium de Gauss y la ecuación de Codazzi [20], para obtener una ecuación que solamente tenga en cuenta las cantidades 4-dimensionales sobre la brana.

$$\mathcal{G}_{ab}^{(1)} n^{(1)a} n^{(1)b} = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{2} \left[(K^{(1)})^2 - K_{ab}^{(1)} K^{(1)ab} \right] \quad (5)$$

$$\mathcal{G}_{ab}^{(2)} n^{(2)a} n^{(2)b} = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{2} \left[(K^{(2)})^2 - K_{ab}^{(2)} K^{(2)ab} \right] \quad (6)$$

como ya ha sido probado en [21], el tensor τ_{ab} se conserva de manera covariante sobre la brana si y sólo si $T_{ab}^{(i)}$ es una combinación lineal de $g_{ab}^{(i)}$ y h_{ab} en la brana. En este artículo no consideraremos campos de materia en el espacio volumen (bulk), es decir, tomamos $T_{ab}^{(i)} = 0$. Usando (2) y (3), obtenemos

$$R - 2\Lambda_1 + K_{ab}^{(1)} K^{(1)ab} - (K^{(1)})^2 = 0 \quad (7)$$

$$R - 2\Lambda_2 + K_{ab}^{(2)} K^{(2)ab} - (K^{(2)})^2 = 0 \quad (8)$$

donde se ha usado la propiedad $g_{ab}^{(i)} n^{(i)a} n^{(i)b} = 1$.

Usando los tensores $S_{ab}^{(i)}$ definidos previamente, y sus trazas $S^{(i)} = h^{ab} S_{ab}^{(i)}$ con $i = 1, 2$; obtenemos para las ecuaciones (7) y (8)

$$R - 2\Lambda_1 + S_{ab}^{(1)} S^{(1)ab} - \frac{1}{3}(S^{(1)})^2 = 0 \quad (9)$$

$$R - 2\Lambda_2 + S_{ab}^{(2)} S^{(2)ab} - \frac{1}{3}(S^{(2)})^2 = 0 \quad (10)$$

escribiendo los tensores $S_{ab}^{(1)}$ y $S_{ab}^{(2)}$ en términos de las cantidades S_{ab} y Q_{ab} :

$$S_{ab}^{(1)} = \frac{1}{2}(S_{ab} + Q_{ab}) \quad (11)$$

$$S_{ab}^{(2)} = \frac{1}{2}(S_{ab} - Q_{ab}) \quad (12)$$

Y sumando las ecuaciones (9) y (10), y reemplazando en (11) y (12) se tiene la ecuación

$$R - \Lambda_1 - \Lambda_2 + \frac{1}{4}(S_{ab} S^{ab} - \frac{1}{3} S^2) + \frac{1}{4}(Q_{ab} Q^{ab} - \frac{1}{3} Q^2) = 0 \quad (13)$$

Restando la ecuación (10) de (9) y usando nuevamente (11) y (12) obtenemos

$$S_{ab} Q^{ab} - \frac{1}{3} S Q = 2(\Lambda_1 - \Lambda_2) \quad (14)$$

Adicionalmente a las ecuaciones (13) y (14), consideraremos la ecuación de conservación

$$D_a Q_b^a = 0 \quad (15)$$

la cual surge como consecuencia de la relación de Codazzi (ver [20]) aplicada a los tensores $S_{ab}^{(i)}$. Estos tensores son construidos a partir de las curvaturas extrínsecas sobre cada lado de la brana. El sistema de ecuaciones (13), (14) y (15), constituye un sistema cerrado de ecuaciones gravitacionales sobre la brana, donde D_a es la derivada covariante sobre la brana b , asociada con la métrica inducida h_{ab} , y $Q = Q_{ab}h^{ab}$ es la traza del tensor Q_{ab} . Finalmente, usando la ecuación (4) después de reemplazar (11) y (12), se obtiene lo siguiente

$$S_{ab} = \frac{2}{(M_1^3 + M_2^3)} \left[m^2 G_{ab} + \sigma h_{ab} - \frac{1}{2}(M_1^3 - M_2^3)Q_{ab} - \tau_{ab} \right] \quad (16)$$

El sistema de ecuaciones (13)-(16) se debe resolver para la métrica, los campos de materia y el campo tensorial simétrico Q_{ab} , los cuales existen sobre la brana.

3. Ecuaciones de Friedmann

Ahora vamos a utilizar el sistema de ecuaciones (13)-(16) en un contexto cosmológico, con el propósito de hallar las ecuaciones generalizadas de Friedmann.

Supongamos un espacio maximalmente simétrico, y escojamos las componentes Q_b^a de la siguiente forma

$$Q_0^0 = -\beta(t), \quad Q_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu q(t), \quad \mu, \nu = 1, 2, 3 \quad (17)$$

las cuales son compatibles con la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo, aquí es importante aclarar que β no tiene dimensiones de densidad (ver ec. (4)). Primero que todo vamos a desarrollar explícitamente (14). Para hacer ésto, se tiene en cuenta la métrica de Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (18)$$

Consideremos un fluido ideal sobre la brana como la fuente del tensor energía-impulso

$$\tau_b^a = \text{diag}(-\rho(t), p(t), p(t), p(t)) \quad (19)$$

donde la densidad $\rho(t)$ y la presión $p(t)$ son independientes de la posición sobre la brana, para poder garantizar así una cosmología homogénea sobre ella. La traza del tensor energía impulso es $\tau = -\rho + 3p$, y la ecuación covariante de conservación de la energía $\nabla_a \tau_b^a = 0$ conduce a la relación

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (20)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la ecuacion (14) se puede ahora reescribir de manera explícita.

Comenzando con el término $S_{ab}Q^{ab}$, y considerando (16) $\alpha = (M_1^3 + M_2^3)$ y $\eta = (M_1^3 - M_2^3)$, tenemos.

$${}_{ab}Q^{ab} = \frac{2}{\alpha} \left\{ m^2 \left[\frac{3\beta}{a^2}(\dot{a}^2 + k) - \frac{3q}{a^2}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \right] + \sigma(-\beta + 3q) - \frac{1}{2}\eta(\beta^2 + 3q^2) - (\rho\beta + 3pq) \right\} \quad (21)$$

donde hemos usado (17).

Del mismo modo, para SQ , donde S es la traza de S_{ab} , obtenemos para este caso

$$SQ = -\frac{2}{\alpha} \left[\frac{6m^2}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) - 4\sigma - \rho + 3p + \frac{1}{2}\eta(-\beta + 3q) \right] (-\beta + 3q) \quad (22)$$

Sustituyendo la ecuación (21) y (22) en la expresión (14)

$$\frac{m^2}{a^2}(3q + \beta)(k + \dot{a}^2) - p_g(\sigma + \rho) + \beta \left(\frac{\sigma}{3} - p - \eta q - \frac{1}{3}\eta\beta - \frac{2}{3}\rho - \frac{2m^2\ddot{a}}{a} \right) = \alpha(\Lambda_1 - \Lambda_2) \quad (23)$$

y usando las expresiones para p y q

$$p = -\rho - \frac{a}{3\dot{a}}\dot{\rho} \quad (24)$$

$$q = -\beta - \frac{a}{3\dot{a}}\dot{\beta} \quad (25)$$

las cuales han sido obtenidas usando las ecuaciones de conservación para τ_a^b y Q_a^b . Finalmente la ecuación (14) toma la forma

$$2m^2 \left[\left(-\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + \frac{2(\rho + \sigma)}{3m^2} + \frac{a\dot{\rho}}{6m^2\dot{a}} \right) \beta + \left(-\frac{\dot{a}}{2a} - \frac{k}{2a\dot{a}} + \frac{a(\rho + \sigma)}{6m^2\dot{a}} \right) \dot{\beta} \right] + \frac{1}{3}\eta \left(2\beta + \frac{a\dot{\beta}}{\dot{a}} \right) \beta = \alpha(\Lambda_1 - \Lambda_2) \quad (26)$$

ésta expresión se transforma en una derivada total si se multiplica por $a^3\dot{a}$; tal que al realizar la integración, obtenemos

$$4m^2\beta \left(H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\rho + \sigma}{3m^2} \right) - \frac{2}{3}(M_1^3 - M_2^3)\beta^2 = -(M_1^3 + M_2^3) \left(\Lambda_1 - \Lambda_2 + \frac{C_1}{a^4} \right) \quad (27)$$

donde $H \equiv \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble, C_1 es la constante de integración, y además, se han sustituido α y η .

De manera analoga, podemos notar que en la expresión (13) cada término es una derivada total luego de multiplicar por el factor $a^3\dot{a}$

$$a^3\dot{a}(R - \Lambda_1 - \Lambda_2) = \frac{d}{dt} \left[3a^2(k + \dot{a}^2) - \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)a^4}{4} \right] \quad (28)$$

$$\frac{a^3\dot{a}}{4}(S_{ab}S^{ab} - \frac{1}{3}S^2) = -\frac{1}{12\alpha^2} \frac{d}{dt} \left[2a^2(\rho + \sigma) + \eta\beta a^2 - 6m^2(2k + \dot{a}^2) \right]^2 \quad (29)$$

$$\frac{a^3\dot{a}}{4}(Q_{ab}Q^{ab} - \frac{1}{3}Q^2) = -\frac{1}{12} \frac{d}{dt} (a^4\beta^2) \quad (30)$$

podemos integrar Eq. (13), multiplicando (13) por $a^3\dot{a}$ y teniendo en cuenta las ecuaciones (28)-(30), entonces obtenemos

$$m^4 \left(H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\rho + \sigma}{3m^2} \right)^2 = (M_1^3 + M_2^3)^2 \left[H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{12} - \frac{C_2}{a^4} \right] + \frac{1}{3}(M_1^3 - M_2^3) \left[m^2\beta \left(H^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\rho + \sigma}{3m^2} \right) \right] - \frac{1}{18}(M_1^6 + M_2^6)\beta^2 \quad (31)$$

donde C_2 es la constante de integración.

Vemos que para $M_1 = M_2 = M$ la ecuación (27) se simplifica y si además $m = 0$, la ecuación (31) se reduce a

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{12} + \frac{C_2}{a^4} + \frac{(\rho + \sigma)^2}{36M^6} + \frac{M^6(\Lambda_1 - \Lambda_2 + C_1/a^4)^2}{16(\rho + \sigma)^2} \quad (32)$$

la cual corresponde a la ecuación (28) obtenida en [21]. Luego de asumir $\Lambda_1 = \Lambda_2$ y $C_1 = 0$ en (32), ésta ecuación se reduce a los resultados ya reportados en [21,22,23,24].

section*Conclusiones Considerando que no hay contenido material en el espacio volumen, hemos obtenido un nuevo escenario para la evolución cosmológica sobre la brana, lo cual es manifiesto en el sistema cerrado de ecuaciones hallado anteriormente. Los resultados más relevantes están contenidos en la ecuación (27) la cual determina el parámetro β , la ecuación (31), la cual corresponde a una generalización de la ecuación de Friedmann respecto a la encontrada en la cosmología

estandar. En la cosmología de branas hoy en día existen todavía muchos interrogantes, por ejemplo, la evolución de las perturbaciones cosmológicas o la relación que pueda existir entre los modelos de branas y una teoría fundamental como la teoría de cuerdas. Si la masa de Planck es del orden de magnitud predicho por la teorías de branas, entonces es posible que en un futuro próximo se puedan observar evidencias experimentales de los modelos de mundos branas, ya sea en experimentos de tipo gravitacional o en colisionadores de partículas tales como el LHC.

Referencias

- [1] Kaluza T. 1921 *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* K1 p 966; Klein O. 1926 *Z. Phys.* **37** 895.
- [2] Polchinski J, *String Theory, Two Volumes* Cambridge University Press (1999)
- [3] Akama K 1982 *Lect. Notes Phys.* **176** 267
- [4] Rubakov V. A. and Shaposhnikov M. E. 1983, *Phys. Lett. B* **125** 136.
- [5] Visser M. 1985, *Phys. Lett. B* **159** 22
- [6] Squires E. J. 1986 *Phys. Lett. B* **167** 286
- [7] Gibbons G. W. and Wiltshire D. L. 1987 *Nucl. Phys. B* **717**
- [8] Horava P. and Witten E. 1996 *Nucl. Phys. B* **460** 506; *ibid Nucl. Phys. B* **475** 94
- [9] Witten E. 1996 *Nucl. Phys. B* **471** 135
- [10] Lukas A, Ovrut B A, Stelle K S, Waldram D 1999 *Phys. Rev. D* **59** 086001; *ibid Nucl. Phys. B* **552** 246
- [11] Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G 1998 *Phys.Lett. B* **429** 263
- [12] Antoniadis I, Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G 1998 *Phys. Lett. B* **436** 257
- [13] Antoniadis I 1990 *Phys. Lett. B* **246** 377
- [14] Randall L, Sundrum R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 3370
- [15] Randall L, Sundrum R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4690
- [16] Y. V. Shtanov, hep-th/0005193
- [17] H. Collins and B. Holdon, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 105009
- [18] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *Phys. Lett. B* **485** (2000) 208
- [19] A. C. Davis, I. Vernon, S. C. Davis and W. B. Perkins *Phys. Lett. B* **504** (2001) 254
- [20] Øyvind Grøn and Sigbjørn Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity*. 18^a version of 2003. Free version on the Internet.
- [21] Y. V. Shtanov, *Phys. Lett. B* **541** 177 (2002) **477** (2000) 285-291.
- [22] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger, and D. Langlois, *Phys Lett. B* **477** (2000) 285-291.
- [23] P Binétruy, C Deffayet y D Langlois, *Nucl. Phys. B* **565** (2000) 269
- [24] D. Langlois, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **148** (2003) 181-212
- [25] P. I. Fomin and Y. V. Shtanov, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 3139-3152