Revista Colombiana de Física, vol. 41, No. 3, Octubre 2009

Solución Computacional de Ecuaciones Parabólicas No-Lineales

Computational Solution of Non-Linear Parabolic Equations

F. Fonseca[1], S. Zuluaga[1]

[1]*Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, ciudad universitaria*

Recibido 22 de oct. 2007; Aceptado 2 de sept. 2009; Publicado en línea 30 de oct. 2009

Resumen

Estudiamos computacionalmente la solución de ecuaciones parabólicas no-lineales en dos dimensiones. Ejemplos de problemas físicos que están gobernados por esta clase de ecuaciones, corresponden a fenómenos de difusión, de propagación del calor, crecimiento de superficies, mercados de valores (Black-Scholes), etc. En nuestro trabajo estudiamos diferentes clases de términos no-lineales, tales como $|\square\Psi|^2$ e imponemos términos de perturbación aleatorios localizados en el espacio, los cuales son independientes, tanto de la posición como del tiempo. El objetivo al introducir estos términos de perturbación es estudiar su influencia en los estados estacionarios, que puede adquirir el sistema. De la misma forma, trabajamos la propagación temporal de paquetes gaussianos, con dominios de frontera espacial complejas.

Palabras claves: ecuaciones parabólicas, perturbación, frontera compleja.

Abstract

In this paper, we studied the solutions for non-linear parabolic equations in two dimensions. Examples of physical problems ruled by this kind of equations are diffusion problems, such as the heat equation, surface growth, black-scholes, etc. In our work we study different kinds of non lineal terms such as $|\square\Psi|^2$, and imposing random perturbation terms in the space, which are independent in position and time. The target of introducing these terms is to study its influence in the stationary states of the system. In the same way, we work the temporal propagation of Gaussian packages with complex boundaries.

Keywords: parabolic equations, perturbation, complex boundary.

1. Introducción

Los fenómenos de difusión son de alta importancia tanto en la física como en las matemáticas, y dependiendo de la frontera, pueden llegar a ser bastantes complicados. En este artículo estudiamos en un principio la ecuación de calor clásica utilizando nuestro algoritmo, el cual se basa en diferencias finitas obteniendo una excelente concordancia con la teoría.

Las ecuaciones en las que estamos interesados son la ecuación del calor y la ecuación de Burger. Las cuales son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u + \gamma\left(\nabla u\right)^2 \tag{2}$$

La ecuación (1) es lineal y es la ecuación clásica de calor. La ecuación (2), es no-lineal y es conocida como la ecuación de Burger, muy importante en mecánica de fluidos.

2. Método numérico

El algoritmo se basa en el método de diferencias finitas, Entonces cuando se discretizan las derivadas parciales se comete un error del orden de Δx, Δy y Δt. Para que este error no rija la solución de la ecuación diferencial se escogieron valores específicos de Δx, Δy y Δt. Para ver más acerca de estos métodos y su estabilidad se puede consultar [1] y otros tipos de métodos pueden ser encontrados en [2]

Resutados

Es bien conocido que cuando la ecuación de difusión llega al equilibrio, la solución debe satisfacer la ecuación de Laplace. Esto significa que la solución será armónica y en consecuencia su máximo y mínimo estarán en la frontera. Para la ecuación del calor clásica en una dimensión obtuvimos excelentes resultados, encontrando un error numérico del orden de 10^{-3} %. Lo cual nos indica que nuestro algoritmo funciona correctamente.

En la Fig 1, se muestra la solución estacionaria de la ecuación (2) en una dimensión, con $k=1$ y $\gamma=1$, en el intervalo [0,1]

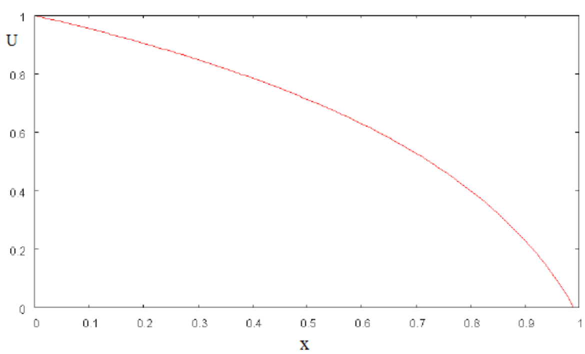

Fig. 1. Solución de la ecuación 2 para tiempos grandes cuando ya se ha alcanzado el estado de equilibrio.

Es importante anotar que en este caso, aunque la solución no satisface la ecuación de laplace, ya que es no-lineal, todavía conserva las propiedades de alcanzar su máximo y su mínimo en la frontera. También es importante anotar que esta solución final o estacionaria, es completamente independiente de las condiciones iniciales del sistema, y depende únicamente de las condiciones impuestas en la frontera.

En las figuras 2, 3, se muestra la comparación en dos dimensiones entre las soluciones de las ecuaciones de calor clásica, ec. (1), y en las figuras 4 y 5 se presenta la solución de la ecuación de Burger, ec. (2).

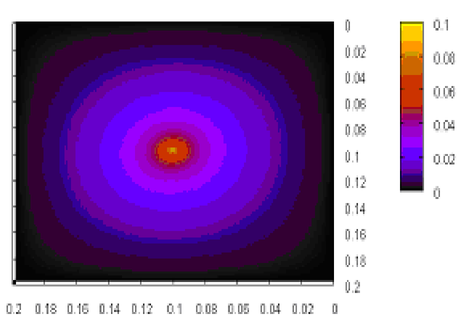

Fig. 2. Solución estacionaria de la ecuación de Burger

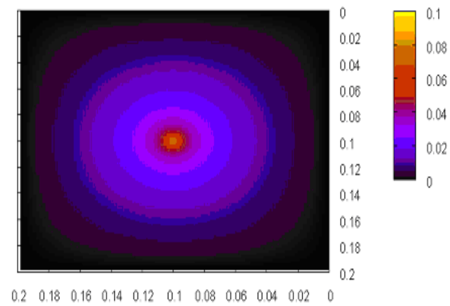

Fig. 3. Solución estacionaria de la ecuación de del calor clásica

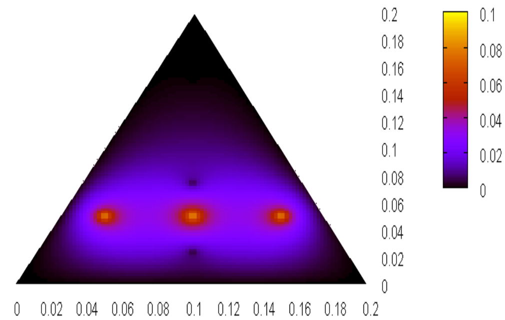

Fig. 4. Solución estacionaria de la ecuación de Burger

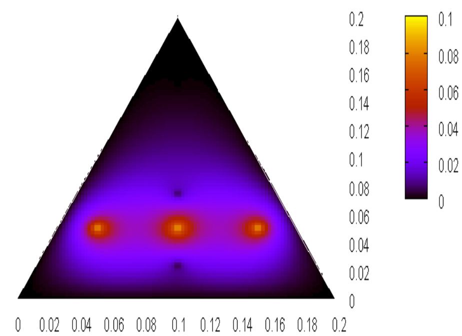

Fig. 5. Solución estacionaria de la ecuación del calor clásica

En estos casos tenemos que la frontera está en 0, mientras que hay puntos fijos los cuales se ponen a 0.1, en el caso del cuadrado, y a 0.2 y 0 en el caso del triangulo.
En estas gráficas mostramos la solución estacionaria de la ecuación de Burger y la ecuación clásica del calor tanto en un cuadrado como en un triángulo. Puede verse que de nuevo en ambos casos se conserva la propiedad de alcanzar los máximos y mínimo en la frontera y de nuevo, igual que en el caso unidimensional, la ecuación de Burger difiere en la solución estacionaria de la ecuación del calor ya que alrededor de los puntos calientes, la solución desarrola mayores valores.

Conclusiones

Nuestro método numérico nos da una excelente concordancia con las soluciones teóricas para fronteras sencillas, y puede ser aplicado a fronteras extremadamente complicadas en donde la solución teórica puede ser muy complicada. De igual forma fue aplicada a la ecuación de Burger, la cual es una ecuación parabólica no lineal, encontrando que aunque la solución para tiempos suficiente mente grandes, cuando el sistema ha alcanzado el equilibrio, es muy parecida a la solución estacionaria de la ecuación del calor, esta no satisface la ecuación de Laplace.

Referencias

[1] R. Courant, K Friedrichs, H. Lewi, On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics, Mathematische Annalen 100, 32-74, 1928

[2] Johannes Tausch, Journal of Computational Physics, 956-969, 2007